Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2018

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IV razred srednje škole

1. Neka je p realan broj takav da korijeni polinoma $x^3+2px^2-px+10$ čine aritmetičku progresiju. Naći te korijene.

Rješenje: Označimo korijene datog polinoma sa a, b i c. Kako oni čine aritmetičku progresiju, to je $b=\frac{a+c}{2}$. Dalje, zadati polinom možemo zapisati u obliku

$$x^3+2px^2-px+10=(x-a)\left(x-\frac{a+c}{2}\right)(x-c),$$

pa množeći članove na desnoj strani jednakosti dobijamo:

$$x^3+2px^2-px+10=x^3-\frac{3}{2}(a+c)x^2+\left(\frac{(a+c)^2}{2}+ac\right)x-(a+c)\frac{ac}{2}.$$

Odavde je:
(a) $\frac{3}{2}(a+c)=-2p$,
(b) $\frac{(a+c)^2}{2}+ac=-p$,
(c) $(a+c)\frac{ac}{2}=-10$.
Iz jednakosti (a) i (c) dobijamo $\frac{ac}{3}=\frac{5}{p}$ i $a+c=-\frac{4p}{3}$. Uvrštavajući dobijene vrijednosti u jednakost (b) dobijamo polinom $16p^3+18p^2+270=0$, odnosno polinom $8p^3+9p^2+135=0$. Provjerom djelilaca slobodnog člana dobijamo da je $p=-3$ korijen ovog polinoma, pa je

$$8p^3+9p^2+135=(p+3)(8p^2-15p+45).$$

Diskriminanta polinoma $8p^2-15p+45$ je $225-1440=-1215<0$, pa on nema realnih korijena. Zaključujemo da je $p=-3$ jedini realni korijen polinoma $8p^3+9p^2+135=0$. Dakle, pošto je $p=-3$, iz (a) i (c) slijedi da je $a=-1$, $c=5$, pa je $b=2$. Dakle, traženi korijeni su -1, 2, 5. $\square$

2. Naći sve funkcije $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ takve da za svako $x,y\in(0,+\infty)$ važi

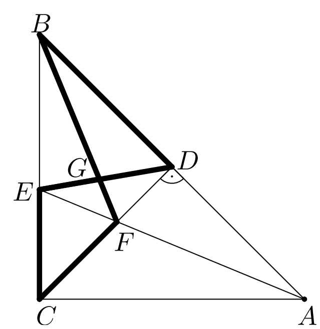
$$f(x)f(y)+f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f\left(\frac{\lambda}{y}\right)=2f(xy),$$

gdje je $\lambda>0$ fiksiran broj tako da $f(\lambda)=1$.

Rješenje: Uvrštavajući $x=y=1$ u jednačinu dobijamo $(f(1))^2+(f(\lambda))^2=2f(1)$, odnosno $(f(1)-1)^2=0$. Odavde je $f(1)=1$.
Ako uzmemo $y=1$, jednačina postaje $f(x)f(1)+f(\frac{\lambda}{x})f(\lambda)=2f(x)$, pa je $f(x)=f(\frac{\lambda}{x})$.
Dalje, za $y=\frac{\lambda}{x}$ imamo $f(x)f(\frac{\lambda}{x})+f(\frac{\lambda}{x})f(x)=2f(\lambda)$, odnosno $f(x)f(\frac{\lambda}{x})=1$. Odavde je $f^2(x)=1$ za svako $x>0$.
Na kraju, $x=y=\sqrt{t}$ nam daje $f^2(\sqrt{t})+f^2(\frac{\lambda}{\sqrt{t}})=2f(t)$. Dakle, slijedi da je $f(t)=1$ za svako $t>0$. $\square$

3. Neka je F tačka presjeka visine CD i simetrale unutrašnjeg ugla kod tjemena A pravouglog trougla ABC, $\angle ACB=90^\circ$. Neka je E tačka presjeka prave AF i katete BC i G tačka presjeka duži ED i BF. Dokazati da je površina četvorougla $CEFG$ jednaka površini trougla BDG.

Rješenje:



Prvo zapažamo da je $\triangle ABC$ sličan sa $\triangle ACD$, pa je $AC:AB=AD:AC$. Kako je $CE:EB=AC:AB$ i $DF:FC=AD:AC$ slijedi da je

$$CE\cdot FC=BE\cdot DF. \tag{1}$$

Dalje važi

$$P_{\triangle DBC}=P_{FGEC}+P_{\triangle DGF}+P_{\triangle DGB}+P_{\triangle GEB}. \tag{2}$$

S druge strane je

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin \angle BCD.$$

Koristeći (1) dobijamo da je

$$BC \cdot CD = (BE + EC) \cdot (CF + FD) = BE \cdot CF + BE \cdot FD + EC \cdot CF + EC \cdot FD =$$

$$= BE \cdot CF + CE \cdot FC + EC \cdot FC + EC \cdot FD = (BE + EC) \cdot CF + EC \cdot (CF + FD) =$$

$$= BC \cdot CF + EC \cdot CD$$

Zato je

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}(BC \cdot CF + EC \cdot CD) \sin \angle BCD = P_{\triangle BCF} + P_{\triangle CED}. \tag{3}$$

Dalje je

$$P_{\triangle BCF} = P_{CFGE} + P_{\triangle BEG}, \;\; P_{\triangle CED} = P_{CFGE} + P_{\triangle FGD}.$$

Iz (2) i (3) slijedi da je

$$P_{CFGE} = P_{\triangle GBD}.$$

□

4. Dokazati da ne postoji skup $S \subset \mathbb{N}$, $S \neq \mathbb{N}$, takav da za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N} \backslash S$, unutar skupa S se nalazi tačno n prirodnih brojeva koji su uzajamno prosti sa n.

Rješenje: Pretpostavimo da postoji takav skup S. Kako $S \neq \mathbb{N}$, to postoji $n \in \mathbb{N} \backslash S$. Za taj prirodan broj postoji tačno n brojeva iz skupa S koji su uzajamno prosti sa n. Kako broj n ima konačno mnogo različitih prostih brojeva u svojoj faktorizaciji, to povlači da se van skupa S nalazi beskonačno mnogo prostih brojeva.
Neka su p, q dva prosta broja koji ne pripadaju skupu S. Tada se unutar skupa S nalazi tačno p prirodnih brojeva koji su uzajmano prosti sa p.
Primijetimo da za svaki prirodan broj $\alpha > 1$ važi $p^\alpha \in S$. U suprotnom, ako bi važilo $p^\alpha \notin S$, tada bi unutar skupa S postojalo p^α brojeva koji su uzajamno prosti sa p^α. Kako su ti brojevi uzajamno prosti sa p^α, tada će ti brojevi biti uzajamno prosti i sa p, što nije tačno jer onda imamo $p^\alpha > p$ brojeva iz S koji su uzajamno prosti sa p. Dakle, $p^\alpha \in S$. Tada, kako $q \notin S$ i kako $nzd(p^\alpha, q) = 1, \forall \alpha > 1$, onda to povlači da u S ima beskonačno mnogo prirodnih brojeva koji su uzajamno prosti sa $q \notin S$, što nije tačno. Naša pretpostavka je netačna, pa ne postoji skup S sa tim svojstvom. □